На правах рукописи

ЛЕКОМЦЕВ Андрей Валентинович

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» на кафедре вычислительной математики.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пименов Владимир Германович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Короткий Александр Илларионович
	кандидат физико-математических наук, доцент Вдовин Андрей Юрьевич
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт вычислительной математики РАН

Защита диссертации состоится “____”____________ 2010 года в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу:
620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького».

Автореферат разослан “____” ________________ 2010 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие свойства реальных объектов определяются эффектом последействия, состоящего в том, что будущее состояние объекта зависит не только от настоящего, но и от прошлого, то есть от предыстории. Ряд задач вообще теряет содержательный смысл, если не рассматривается зависимость от прошлого. Такие процессы часто моделируются как обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздываниями различных видов, называемыми также уравнениями с последействием или функционально-дифференциальными уравнениями (сокращенно ФДУ), так и уравнениями математической физики параболического и гиперболического типов с эффектом запаздывания (эволюционных ФДУ). Кроме того, такие объекты могут иметь дополнительные алгебраические связи (функционально-дифференциально-алгебраические уравнения, сокращенно ФДАУ).

Возникновение систем, связанных с эффектом последействия, потребовало развития соответствующей теории, которая активно развивалась такими математиками как V. Volterra, Н.В. Азбелев, А.С. Андреев, Г.А. Бочаров, С.А. Брыкалов, А.И. Булгаков, Ю.Ф. Долгий, Е.С. Жуковский, Г.А. Каменский, А.В. Ким, Ю.С. Колесов, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, Н.Ю. Лукоянов, В.И. Максимов, В.П. Максимов, В.В. Малыгина, Г.И. Марчук, А.Д. Мышкис, В.Р. Носов, С.Б. Норкин, Ю.С. Осипов, В.Г. Пименов, Л.С. Понтрягин, Л.Ф. Рахматуллина, А.Н. Сесекин, П.М. Симонов, Е.Л. Тонков, С.Н. Шиманов, Л.Э. Эльсгольц, C.H.T. Baker, R. Bellman, K.L. Cooke, R.D. Driver, J.K. Hale, V. Lakshmikantham, J. Wu и многими другими.

Полученные в этой области фундаментальные результаты сформировали качественную теорию дифференциальных уравнений с запаздыванием. Вместе с тем, точное решение подобных систем аналитическими методами удается получить лишь в исключительных случаях. В силу этого, проблема создания эффективных численных методов решения задач и разработка их программной реализации современными вычислительными средствами является особенно актуальной.

Для получения численного решения ФДУ существуют различные подходы. Прежде всего, дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием могут быть сведены к уравнениям без запаздывания методом шагов [1]. Однако, уже в случае малого переменного (исчезающего) или распре-

[1] *Эльсгольц Л.Э.,Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука. 1971.

деленного (например, уравнение типа Вольтерра) запаздывания не удается выбрать шаг в алгоритмах метода шагов. Этот эффект давно известен, что и стимулирует развитие численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений. В настоящее время разработано достаточно много различных численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, существенно использующих структуру конкретного уравнения [2], [3], [4]. Для ФДУ можно применять непрерывные методы [5], которые обладают большой степенью общности, но представляют ограниченное число средств, что не позволяет использовать их в пакетах прикладных программ. Также для разработки численных алгоритмов и их практического применения хорошо себя зарекомендовала методика, основанная на идеях разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих, построении по конечномерной составляющей полных аналогов методов, известных для систем без запаздывания, и интерполяции с заданными свойствами дискретной предыстории для учета бесконечномерной составляющей, при этом для неявных методов и методов типа Рунге-Кутты применяется экстраполяция с заданными свойствами [6]. Эта методика позволила построить ряд алгоритмов численного решения ФДУ, составивших основу пакета прикладных программ TDST [7].

Тем не менее, далеко не все методы, описанные выше, способны решать жесткие ФДУ. Проблема жесткости является одной из главных в теории и практике численного решения дифференциальных уравнений. Эта проблема преодолевается, в основном, за счет применения неявных методов. Для ФДУ такие методы конструировались и исследовались в работах [6], [8], [9]. Однако при применении неявных методов на каждом шаге приходится решать нелинейные системы, что обычно приводит к большим вычислительным затратам. Методы типа Розенброка, описанные для обыкновенных дифферен-

[2] *Холл Д., Уатт Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1979.

[3] *Baker C.T.H., Paul C.A.H. and Wille D.R.* A bibliography on the numerical solution of delay differential equations // MCCM tech. rep. № 269, University of Manchester. 1995.

[4] *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. Oxford Science Publications. Oxford. 2003.

[5] *Tavernini L.* One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1971. Vol. 8. P. 786–795.

[6] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2004.

[7] *Kwom W.H., Kim A.V., Pimenov V.G., Lozhnikov A.B., Han S.H., Onegova O.V.* Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Beta Version. Seoul National University. Seoul. Korea. 1998.

[8] *Квон О.Б.* Тестирование явных и неявных методов типа Рунге-Кутты для систем с запаздыванием // Екатеринбург: УрГУ. Рук. деп. в ВИНИТИ. 24.03.2000. № 193-В00. 32 с.

[9] *Квон О.Б., Пименов В.Г.* Неявные методы типа Рунге-Кутты для функционально-дифференциальных уравнений // Изв. УрГУ. 1998. № 10. С. 69–79.

циальных уравнений в книге [10], позволяют перейти от решения нелинейных систем к решению последовательности линейных систем. При этом они сохраняют свойство решения жестких систем. Распространение данного метода на функционально-дифференциальные уравнения с помощью методики разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих рассматривается в первой главе диссертационного исследования. Насколько известно автору, полуявные методы типа Розенброка для численного решения ФДУ раньше не рассматривались.

Дифференциальные уравнения с дополнительными алгебраическими связями являются достаточно новым объектом, который активно развивается в последние годы и как самостоятельный объект, применяемый в математическом моделировании, так и в связи с исследованиями по проблеме жесткости дифференциальных уравнений. Однако, при появлении запаздывания, число разработанных численных методов решения таких уравнений резко сокращается. Отметим, что ранее одношаговые численные методы решения ФДАУ исследовались в работе [11], многошаговые — в работе [12]. Полуявные методы для численного решения ФДАУ ранее не рассматривались. Разработка эффективных численных методов решения ФДАУ является очень актуальной задачей, которая рассматривается во второй главе диссертационного исследования.

Во многих математических моделях, особенно в теории популяции, возникают уравнения математической физики с запаздыванием [13]. В настоящее время активно развивается качественная теория этих уравнений [14]. В силу сложности таких объектов на первый план выходят численные методы решения, однако исследований по численным методам решения эволюционных ФДУ практически нет. Можно отметить лишь работу [15], где с позиции общего подхода к численному методу как к непрерывному, строятся и исследуются аналоги метода Кранка–Никольсона для уравнения параболического типа с запаздыванием. В большинстве применяемых в настоящее время численных методов для эволюционных ФДУ используются аналоги метода пря-

[10] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Т. 2. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999.

[11] *Пименов В.Г.* Численные методы решения ФДАУ и асимптотическое разложение решений сингулярных уравнений с запаздыванием // Вестник Челябинского государственного университета. 2007. С. 143–151. (Математика. Механика. Информатика.)

[12] *Пименов В.Г.* Многошаговые численные методы решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 145–155.

[13] *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир. 1983. С. 383–394.

[14] *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag. 1996.

[15] *Tavernini L.* Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. Vol. 14, № 5. P. 931–949.

мых (см., например, [16]), однако этот подход может привести к жесткой системе ФДУ большой размерности. В третьей главе диссертационного исследования конструируется аналог метода переменных направлений для численного решения эволюционных уравнений с запаздыванием. Предлагается новый подход для исследования свойств численного решения эволюционных ФДУ, основанный на комбинации общей линейной теории разностных схем [17], используемой для уравнений в частных производных, и теории разностных схем, предложенной ранее для нелинейных ФДУ в работе [18].

Из сказанного выше следует, что тема диссертации актуальна.

Цель работы. К основным целям диссертации относятся:

1. Конструирование полуявных методов типа Розенброка для численного решения жестких функционально-дифференциальных и функционально-дифференциально-алгебраических уравнений.

2. Получение условий сходимости полуявных методов типа Розенброка для функционально-дифференциальных и функционально-дифференциально-алгебраических уравнений.

3. Создание аналога метода переменных направлений для численного решения уравнения параболического типа с эффектом запаздывания, исследование свойств его устойчивости и сходимости.

4. Разработка комплекса программных средств для численного решения жестких функционально-дифференциальных и функционально-дифференциально-алгебраических уравнений, а также двумерного уравнения параболического типа с эффектом запаздывания.

Методы исследования. В основе исследований лежат понятия и методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, численных методов анализа. Исследования проводятся в рамках подхода, основанного на идеях разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих функционала, построении по конечномерной составляющей полных аналогов методов, известных для систем без запаздывания, и интерполяции с заданными свойствами дискретной предыстории для учета бесконечномерной составляющей, при этом для неявных методов и методов типа Рунге-Кутты применяется экстраполяция с заданными свойствами.

Для исследования разрешимости численной модели метода типа Розенброка для функционально-дифференциальных и функционально-дифферен-

[16] *Пименов В.Г.* Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. 2008. Вып. 2. С. 113–116. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)

[17] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1989.

[18] *Пименов В.Г.* Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.

циально-алгебраических уравнений используется принцип сжимающих отображений. На протяжении всех глав диссертации при исследовании порядка невязки методов используется аппарат i-гладкого анализа [19].

При исследовании аналога метода переменных направлений для численного решения двумерного уравнения параболического типа с запаздыванием используется теория двухслойных разностных схем [17]. Для сведения неоднородной задачи параболического типа с запаздыванием к однородной используется подход, основанный на переносе неоднородности в граничных условиях в правую часть уравнения [20]. При получении теорем о сходимости и устойчивости метода переменных направлений используется аппарат абстрактных схем с последействием, ранее разработанный в [18], [6] для случая функционально-дифференциальных уравнений, и методы исследования устойчивости двухслойных разностных схем.

Вычисления производились в программном пакете MATLAB 7.0, который позволяет использовать математические библиотеки для ускорения составления алгоритмов. В нем предусмотрена визуализация результатов, включая анимацию и трехмерную графику.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми, обобщают и дополняют работы отечественных и зарубежных исследователей в данной проблематике и состоят в следующем:

1. Сконструированы полуявные методы типа Розенброка для численного решения жестких функционально-дифференциальных и функционально-дифференциально-алгебраических уравнений.

2. Получены условия сходимости полуявных методов типа Розенброка для численного решения функционально-дифференциальных и функционально-дифференциально-алгебраических уравнений.

3. Создан аналог метода переменных направлений для численного решения уравнения параболического типа с эффектом запаздывания.

4. Получен подход, позволяющий исследовать численные алгоритмы для решения уравнения параболического типа с запаздыванием с неоднородными граничными условиями.

5. Найдены условия, обеспечивающие устойчивость по начальным данным и правой части и сходимость приближенного решения к точному решению неоднородной первой краевой задачи для двумерного уравнения параболического типа с запаздыванием.

6. Разработан комплекс программных средств для численного решения

---

[19] *Ким А.В.* i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 1996.

[20] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1977.

жестких функционально-дифференциальных и функционально-дифференциально-алгебраических уравнений, а также двумерного уравнения параболического типа с эффектом запаздывания.

Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, соответствием полученных теоретических результатов надежным результатам компьютерного моделирования, использованием общепризнанных апробированных математических методов и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа имеет теоретическую и практическую ценность. В работе получен ряд новых теоретических результатов по методам исследования свойств некоторых классов эволюционных уравнений с запаздыванием (разрешимость, устойчивость, численные методы, сходимость, оценка порядка сходимости). Практическая значимость работы обусловлена тем, что предложенный в ней комплекс программ, в котором реализованы разработанные в работе численные методы и алгоритмы, может быть использован при решении прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на 38-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 29 января – 2 февраля 2007 г.); конференции-семинаре "Теория управления и математическое моделирование", посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева (Ижевск, 4–9 мая 2008 года); межвузовской научной конференции по проблемам информатики "СПИСОК-2009" (Екатеринбург, 20–23 апреля 2009 года); научных семинарах кафедры вычислительной математики Уральского государственного университета им. А.М. Горького; а также в Институте математики и механики УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-6] (см. список в конце автореферата). Работы [1, 2, 3, 4] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. В совместных работах [3, 4, 6] научному руководителю В.Г. Пименову принадлежат постановки задач, общие методики исследований и идеи доказательств основных утверждений, а диссертанту — доказательства основных теорем, разработка алгоритмов численных методов и программных средств для проведения численного моделирования.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа содержит список основных сокращений и обозначений, введение, три главы, список литературы и двух приложений. Общий объем работы составляет 134 страниц. Библиография содержит 55 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы исследований, обсуждается история вопроса и показывается место проводимых исследований среди других подобных исследований, формулируется цель диссертационной работы и пути ее достижения, кратко описывается содержание диссертации.

В первой главе рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t(\cdot)), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0,\ x_{t_0}(\cdot) = \{x^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{2}$$

где $t \in [t_0, t_0 + \theta] \subset \mathbb{R}^1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x^0(s) \in Q_n[-\tau, 0)$, $x_t(\cdot) \equiv \{x(t+s),\ -\tau \leqslant s < 0\} \in Q_n[-\tau, 0)$ — функциональная предыстория решения к моменту t, $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times Q_n[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^n$.
$Q_n[-\tau, 0)$ — пространство n-мерных функций $q(\cdot)$, непрерывных на полуинтервале $[-\tau, 0)$, исключая, возможно, конечное число точек разрыва первого рода (в которых $q(\cdot)$ непрерывна справа), для которых существует левый предел $\lim\limits_{s \to -0} q(s)$, норма в $Q_n[-\tau, 0)$ определяется с помощью формулы: $\|q(\cdot)\|_\tau = \sup\limits_{-\tau \leqslant s < 0} \|q(s)\|_{\mathbb{R}^n}$.

В дальнейшем также будет использоваться пространство $Q_n[-\tau, 0]$, которое состоит из n-мерных функций $q(\cdot)$, непрерывных на $[-\tau, 0]$, исключая, возможно, конечное число точек разрыва первого рода (в которых $q(\cdot)$ непрерывна справа), с нормой $\|q(\cdot)\|_{Q_n} = \sup\limits_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} \|q(s)\|_{\mathbb{R}^n}$.

Предполагается, что отображение f в своей области определения липшицево по x и $x(\cdot)$ с константами Липшица L_1 и M_1. Договоримся, что далее под $\sum\limits_{i=1}^{0}$ будет пониматься 0.

Под точным решением задачи (1)–(2) на $[t_0, t_0 + \theta]$ понимается функция $x(t)$, определенная на отрезке $[t_0 - \tau, t_0 + \theta]$, непрерывная и кусочно-дифференцируемая на $[t_0, t_0 + \theta]$, удовлетворяющая уравнению (1) на $[t_0, t_0 + \theta]$ и начальным условиям (2) (в точках разрыва производной в уравнении (1) под $\dot{x}$ понимается правосторонняя производная). Далее в диссертации отмечается тот факт, что при условиях непрерывности по сдвигу [6] и липшицевости отображения f, задача (1)–(2) имеет единственное решение.

Задается на $[t_0, t_0 + \theta]$ временная сетка $t_k = t_0 + k\Delta,\ k = 0, \ldots, M$, с равномерным шагом $\Delta = \theta/M$, где M — целое число. Для простоты будем считать, что $\tau/\Delta = m$ — целое число. Вводится дискретная аппроксимация задачи (1)–(2), где приближение точного решения $x(t_k)$ в точке t_k обозначается через $v_k \in \mathbb{R}^n$. Дискретной предысторией модели в момент t_k $(k = 0, \ldots, M)$ называется множество из $m + 1$ векторов:

$$\{v_i\}_k = \{v_i \in \mathbb{R}^n,\ k - m \leqslant i \leqslant k\}.$$

Для любого $a > 0$ оператором интерполяции-экстраполяции IE предыстории модели называется отображение:

$$IE : \{v_i\}_k \to v(\cdot) \in Q_n[t_k - \tau,\ t_k + a\Delta].$$

Будем говорить, что оператор IE имеет порядок погрешности p на точном решении, если существует константы A, B такие, что для всех $a > 0$, $k = 0, \ldots,\ M - 1$, $t \in [t_k - \tau,\ t_k + a\Delta]$ и $(t_{M-1} + a\Delta) \leqslant t_0 + \theta$ выполняется:

$$\|x(t) - v(t)\| \leqslant A \max_{k-m \leqslant i \leqslant k} \|x(t_i) - v_i\| + B\Delta^p.$$

В дальнейшем при конструировании конкретного метода четвертого порядка для численного решения ФДУ используется интерполяция вырожденными сплайнами третьего порядка и экстраполяция продолжением интерполяционного многочлена третьей степени. Такой способ интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности 4 [6].

Перед построением численной модели метода типа Розенброка вводится следующее обозначение:

$$\Delta_k(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot)) = \frac{\Delta^3}{48}[\partial_t f(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot)) \cdot f(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot))]\times$$

$$\times[\partial_t \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot)) - \frac{\partial}{\partial x}\partial_t f(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot))],$$

где под $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ понимается матрица частных производных, а под $\partial_t f$ — коинвариантная производная.

Далее конструируются полуявные методы типа Розенброка для численного решения ФДУ. Выписывается численная модель метода типа Розенброка с набором коэффициентов α_{ij}, b_i, γ_{ij} и интерполяцией-экстраполяцией IE:

$$v_0 = x_0,\ v_{t_0}(\cdot) = \{x^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{3}$$

$$v_{k+1} = v_k + \Delta \cdot \Psi(t_k, v(\cdot)) = v_k + \Delta[\sum_{j=1}^{4} b_j h_j(v_{t_k}(\cdot)) + \Delta_k(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot))], \tag{4}$$

где отображения h_i удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$h_i(v_{t_k}(\cdot)) = f(t_k + \alpha_i\Delta, v_k + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}h_j(v_{t_k}(\cdot)), v_{t_k+\alpha_i\Delta}(\cdot)) +$$

$$+\Delta\gamma_i\partial_t f(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot))\Delta\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}h_j(v_{t_k}(\cdot)),\ i = \overline{1,4}, \qquad (5)$$

здесь $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij},\ \gamma_i = \sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij},\ \gamma_{ii} = \gamma.$

Для обеспечения четвертого порядка невязки метода выписываются условия на коэффициенты метода. Условия на коэффициенты были взяты из аналогичного метода типа Розенброка для обыкновенных дифференциальных уравнений (сокращенно ОДУ). Также приводится алгоритм, с помощью которого получается один из возможных наборов коэффициентов, который удовлетворяет всем условиям на коэффициенты метода. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений для обеспечения такого же порядка сходимости метода для ФДУ необходимо в определение метода добавить дополнительное слагаемое $\Delta_k(t_k, v_k, v_{t_k}(\cdot))$. Этот эффект возникает из-за того, что в отличие от ОДУ в функционально-дифференциальных уравнениях порядок вычисления частных и коинвариантных производных правой части имеет принципиальное значение [19]. Вводятся следующие обозначения: $\overline{\alpha} = \max\limits_{i,j=\overline{1,4}}\{|\alpha_{ij}|\},\ \overline{\gamma} = \max\limits_{i,j=\overline{1,4}}\{|\gamma_{ij}|\}$. Затем формулируется теорема о разрешимости системы уравнений (5) при выполнении следующих условий:

1. Отображения $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\partial_t f(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\frac{\partial}{\partial x}\partial_t f(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\partial_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), x_t(\cdot))$ липшицевы по x и $x(\cdot)$.

2. Нормы отображений $f(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\partial_t f(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\partial_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), x_t(\cdot))$, $\frac{\partial}{\partial x}\partial_t f(t, x(t), x_t(\cdot))$ ограничены сверху соответственно константами $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5$.

Теорема 1. *Пусть* $\Delta < 1/(3L_1\overline{\alpha} + 4K_3\overline{\gamma})$. *Тогда существует единственное решение* $J = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$ *системы уравнений* (5).

Данная теорема доказывается с помощью принципа сжимающих отображений. Здесь и в дальнейшем нумерация теорем и определений в автореферате соответствует нумерации в диссертации. Далее вводятся определения порядка сходимости и порядка невязки метода.

Определение 5. *Будем говорить, что метод сходится, если*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant M} \|v_k - x(t_k)\| \to 0 \text{ при } M \to \infty,$$

и имеет порядок сходимости p, если найдется постоянная C такая, что $\|v_k - x(t_k)\| \leqslant C\Delta^p$ для всех $k = 1, \ldots, M$, и константа C не зависит от M.

Определение 7. *Невязкой (погрешностью аппроксимации) метода типа Розенброка назовем отображение*

$$\psi(t_k) = \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta} - \Psi(t_k, x(\cdot)) =$$
$$= \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta} - \sum_{j=1}^{4} b_j h_j(x_{t_k}(\cdot)) - \Delta_k(t_k, x(t_k), x_{t_k}(\cdot)).$$

Определение 8. *Будем говорить, что невязка имеет порядок p, если найдется константа C такая, что $\|\psi(t_k)\| \leqslant C\Delta^p$ для всех $k = 0, 1, \ldots, M-1$.*

После ввода определений порядка сходимости и порядка невязки метода формулируется основная теорема данной главы о порядке сходимости метода типа Розенброка для ФДУ.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1, *метод* (3)–(5) *имеет невязку четвертого порядка, оператор интерполяции-экстраполяции предыстории модели имеет четвертый порядок. Тогда метод сходится с четвертым порядком.*

Далее для полного завершения вопроса о сходимости метода анализируется порядок невязки. Этот анализ осуществляется с помощью разложения в ряд Тейлора, используя инструмент i-гладкого анализа. Формулируется теорема о порядке невязки метода типа Розенброка.

Проведены вычислительные эксперименты, результаты которых приведены в заключительном параграфе главы 1. Описание программного комплекса, с помощью которого можно проводить численное моделирование решения функционально-дифференциальных уравнений, помещено в Приложение 1. Там же приводятся несколько иллюстраций пользовательского интерфейса.

Вторая глава посвящена исследованию полуявных численных алгоритмов решения функционально-дифференциальных уравнений с алгебраическими связями. Обыкновенные дифференциальные уравнения с дополнительными алгебраическими связями (сокращенно ДАУ) активно развиваются в последние годы и как самостоятельный объект, применяемый в математическом моделировании, так и в связи с исследованиями по проблеме жесткости ОДУ. Одним из эффективных методов численного решения ДАУ является полуявный метод типа Розенброка, во второй главе строится его аналог для ФДАУ. Рассматривается ФДАУ:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot)), \tag{6}$$

$$0 = g(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot)) \tag{7}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0, \tag{8}$$

$$x_{t_0}(\cdot) = \{x^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\},\ y_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{9}$$

где

$$t \in [t_0, t_0 + \theta] \subset \mathbb{R}^1,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ y(t) \in \mathbb{R}^q,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ y_0 \in \mathbb{R}^q,$$
$$x_t(\cdot) \equiv \{x(t+s),\ -\tau \leqslant s < 0\} \in Q_n[-\tau, 0),\ x^0(s) \in Q_n[-\tau, 0),$$
$$y_t(\cdot) \equiv \{y(t+s),\ -\tau \leqslant s < 0\} \in Q_q[-\tau, 0),\ y^0(s) \in Q_q[-\tau, 0),$$
$$f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times Q_n[-\tau, 0) \times Q_q[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^n,$$
$$g : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times Q_n[-\tau, 0) \times Q_q[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^q.$$

Предполагается, что матрица частных производных $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ существует и обратима, и существует единственное решение задачи (6)–(9) на отрезке $[t_0, t_0+\theta]$.

Для определения метода типа Розенброка для ФДАУ берется произвольное положительное целое число s. Рассматривается следующая система уравнений, относительно неизвестных отображений $l_i = l_i(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$ и $p_i = p_i(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$:

$$l_i = \Delta \cdot f(t_k + \alpha_i\Delta, r_i, q_i, v_{t_k+\alpha_i\Delta}(\cdot), w_{t_k+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot l_j + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot p_j\right) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}\partial_t f,\ i = 1, \ldots, s, \tag{10}$$

$$0 = \Delta \cdot g(t_k + \alpha_i\Delta, r_i, q_i, v_{t_k+\alpha_i\Delta}(\cdot), w_{t_k+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}\left(\frac{\partial g}{\partial v} \cdot l_j + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot p_j\right) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}\partial_t g,\ i = 1, \ldots, s, \tag{11}$$

где $\alpha_{ij},\ \gamma_{ij} \in \mathbb{R}^1,\ \alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij},\ \dfrac{\partial f}{\partial v}$ — матрица частных производных в точке $(t_k, v_k, w_k, v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$, $\partial_t f$ — коинвариантная производная в точке $(t_k, v_k, w_k, v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$, через r_i, q_i обозначены следующие выражения:

$$r_i = v_k + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot l_j(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot)),\ i = 1, \ldots, s,$$

$$q_i = w_k + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot p_j(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot)),\ i = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты γ_{ii} выбираются таким образом, чтобы

$$\gamma_{ii} = \gamma,\ i = 1, \ldots, s.$$

Определение 11. *s-этапным методом типа Розенброка для ФДАУ с набором коэффициентов α_{ij}, b_i, γ_{ij} будем называть численную модель следующего вида:*

$$v_0 = x_0,\ w_0 = y_0, \tag{12}$$

$$v_{t_0}(\cdot) = \{x^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{13}$$

$$w_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{14}$$

$$v_{k+1} = v_k + \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot l_i(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot)),\ k = 0, \ldots, M-1, \tag{15}$$

$$w_{k+1} = w_k + \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot p_i(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot)),\ k = 0, \ldots, M-1, \tag{16}$$

где отображения $l_i(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$ и $p_i(v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$ являются решением системы уравнений (10)–(11).

Далее рассматривается вопрос о разрешимости системы уравнений (10)–(11). Предполагается, что выполняются следующие условия:

1. Матрицы частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))$ липшицевы по x, y, $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$.

2. Коинвариантные производные $\partial_t f(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))$, $\partial_t g(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))$ липшицевы по x и y.

3. $\|f(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C$, $\|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_1$, $\|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_2$, $\|\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_3$, $\|\dfrac{\partial g}{\partial y}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_4$, $\|(\dfrac{\partial g}{\partial y})^{-1}(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_5$, $\|\partial_t f(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_{\partial_t f}$, $\|\partial_t g(t, x(t), y(t), x_t(\cdot), y_t(\cdot))\| \leqslant C_{\partial_t g}$.

При выполнении вышеперечисленных требований формулируется следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть шаг разбиения $\Delta < \dfrac{1}{\gamma(C_1 + C_2 C_3 C_5)}$. Будем предполагать, что для любого δ существует U-окрестность точки $A =$*

$(t_k, v_k, w_k, v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$ *такая, что для любой точки* $B = (t, v, w, v(\cdot), w(\cdot))$ *из этой окрестности норма вектора* $\|(\frac{\partial g}{\partial w})^{-1} g(t, v, w, v(\cdot), w(\cdot))\| \leqslant \delta$. *Тогда существует единственное решение* $W = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_s \\ p_1 & \cdots & p_s \end{pmatrix}^T$ *системы уравнений* (10)–(11).

Данная теорема доказывается с помощью принципа сжимающих отображений. Попутно получается ряд необходимых свойств для доказательства основной теоремы второй главы о порядке сходимости метода типа Розенброка для ФДАУ. Для нахождения порядка сходимости метода типа Розенброка вводится понятие квазилипшицевости порядка p.

Определение 10. *Отображение* $f(t_k, v_k, w_k, v_{t_k}(\cdot), w_{t_k}(\cdot))$ *называется квазилипшицевым по* $v(\cdot)$ *и* $w(\cdot)$ *порядка* p, *если существуют константы* L *и* P *такие, что* $\forall v_k^1,\ v_k^2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall w_k^1,\ w_k^2 \in \mathbb{R}^q$, $\forall v_{t_k}^1(\cdot),\ v_{t_k}^2(\cdot) \in Q_n[-\tau, 0)$, $\forall w_{t_k}^1(\cdot),\ w_{t_k}^2(\cdot) \in Q_q[-\tau, 0)$ *выполняется:*

$$\|f(t_k, v_k^1, w_k^1, v_{t_k}^1(\cdot), w_{t_k}^1(\cdot)) - f(t_k, v_k^2, w_k^2, v_{t_k}^2(\cdot), w_{t_k}^2(\cdot))\| \leqslant$$
$$\leqslant L \sup_{t_k - \tau \leqslant t < t_k + \alpha\Delta} \| \begin{pmatrix} v^1(t) \\ w^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^2(t) \\ w^2(t) \end{pmatrix} \| + P\Delta^p.$$

Затем доказывается теорема о порядке сходимости метода типа Розенброка для ФДАУ.

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия теоремы* 4, *метод* (12)–(16) *имеет невязку порядка* $\widetilde{p}_1 + 1$, *оператор интерполяции-экстраполяции предыстории модели имеет порядок* p. *Тогда метод сходится с порядком* $\widetilde{p} = \min\{p, \widetilde{p}_1\}$.

После этого получаются условия на коэффициенты метода типа Розенброка для обеспечения необходимого порядка невязки. При построении 4-х этапного метода типа Розенброка кроме условий на коэффициенты, которые соответствуют случаю для ДАУ, также получаются четыре дополнительных условия:

$$b_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2^2 = \gamma^3 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{\gamma}{12}, \tag{17}$$

$$b_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2^3 = \gamma^3 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{20}, \tag{18}$$

$$\frac{2\alpha_2^2 b_4\beta_{43}\beta_{32}}{\gamma^2} - \frac{2b_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\beta_2'}{\gamma^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12\gamma}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\gamma^2}(b_3\alpha_3\alpha_{32}\alpha_2^2 + b_4\alpha_4(\alpha_{42}\alpha_2^2 + \alpha_{43}\alpha_3^2)) - \frac{b_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\alpha_2^2}{\gamma^3} - \frac{b_4\beta_{32}\alpha_4\alpha_{43}\alpha_2^2}{\gamma^3} = 1, \tag{20}$$

где $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij},\ \beta'_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}$.

Далее формулируется теорема о порядке невязки.

Теорема 6. *Сконструированный метод типа Розенброка имеет невязку четвертого порядка при выполнении четырех дополнительных соотношений* (17)–(20) *на коэффициенты метода.*

Тогда с помощью теорем 5 и 6 получаем, что метод типа Розенброка имеет третий порядок сходимости.

Затем осуществляется подбор коэффициентов для 4-х этапного метода типа Розенброка. В результате удается найти такой набор, при котором выполняются все условия, обеспечивающие выполнение условий теоремы 6. Приводится алгоритм, с помощью которого получается один из возможных наборов коэффициентов, который удовлетворяет всем условиям на коэффициенты метода.

В последнем параграфе главы 2 проводятся численные эксперименты для рассматриваемых задач. Разработанный метод типа Розенброка применяется для решения ФДАУ и ДАУ. В качестве примера ФДАУ рассматривается уравнение, содержащее постоянное сосредоточенное запаздывание и алгебраическую связь. В качестве примера ДАУ рассматривается система уравнений, которая описывает реакцию Робертсона. Уравнение решается с помощью двух методов: метод типа Розенброка для ФДАУ и метода для ДАУ $ode15s$ в программном пакете MATLAB (метод с автоматическим выбором шага, основанный на формулах численного дифференцирования назад). Приводятся сравнительные результаты численных экспериментов. Программные средства, предназначенные для численного решения ФДАУ, описаны в Приложении 1. Там же расположен ряд иллюстраций пользовательского интерфейса.

В качестве иллюстрации метода типа Розенброка рассмотрим тестовый пример, содержащий запаздывание и алгебраическую связь.

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = l_1 x_1(t) + x_2(t) + x_1(t-\tau) - \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot e^{l_2(t-\tau)} - e^{l_1(t-\tau)}, \\ \dot{x_2}(t) = l_2 x_2(t) + x_3(t) - d + e^{l_2 t}, \\ 0 = (l_2 - l_1) x_1(t) - x_2(t-\tau) + x_3(t) - d - (l_2 - l_1) e^{l_1 t} + e^{l_2(t-\tau)}, \\ x_1(t) = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot e^{l_2 t} + e^{l_1 t},\ t \leqslant 0, \\ x_2(t) = e^{l_2 t},\ t \leqslant 0, \\ x_3(t) = d - e^{l_2 t},\ t \leqslant 0, \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$, $\tau = 0.1$, $d = 1.5$; l_1, l_2 — параметры. Точное решение задается теми же формулами, что и начальные условия:

$$x_1(t) = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot e^{l_2 t} + e^{l_1 t}, \quad x_2(t) = e^{l_2 t}, \quad x_3(t) = d - e^{l_2 t}.$$

Система содержит постоянное запаздывание по x_1 и x_2. В качестве значений параметра l_1 были взяты числа -10, -30 , а в качестве значения l_2 — число -1. Рассматриваемый тестовый пример численно решается с помощью разработанного метода типа Розенброка с шагом разбиения $\Delta = 0.01$. Сплошными линиями обозначено точное решение, а маркерами обозначено приближенное решение.

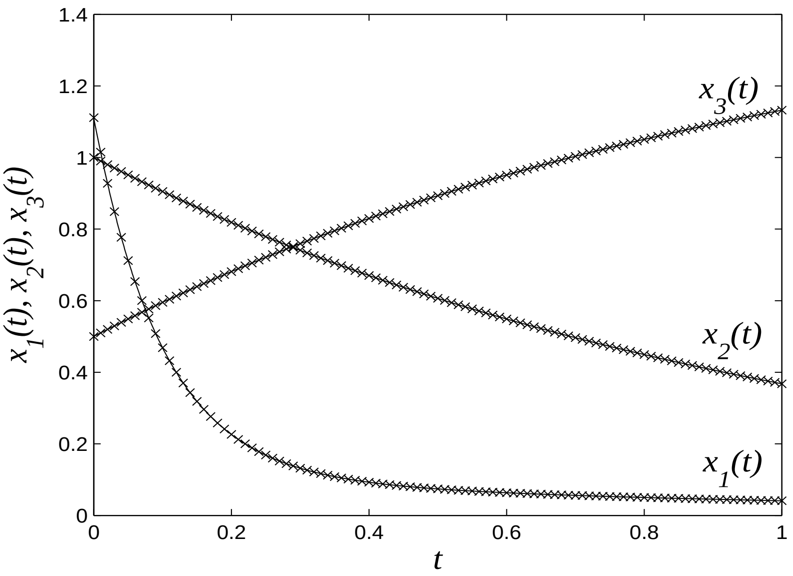

Рис. 1. Параметры: $l_1 = -10$, $l_2 = -1$.

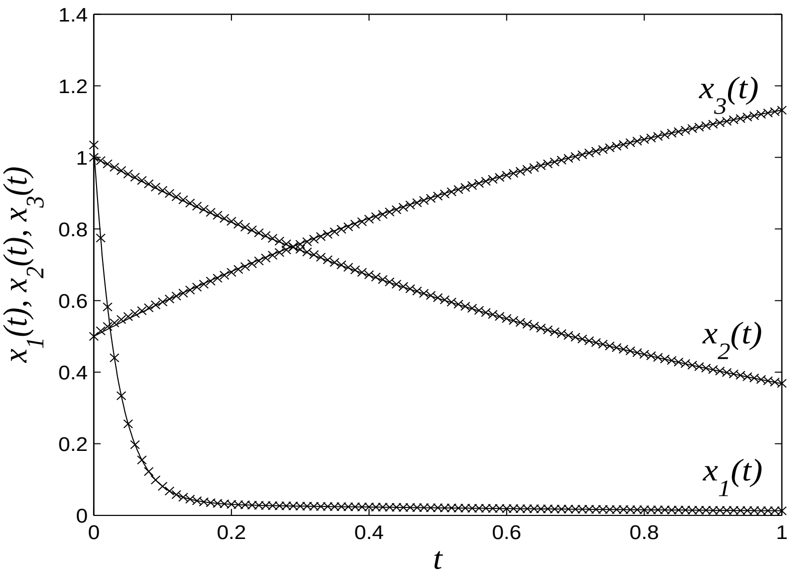

Рис. 2. Параметры: $l_1 = -30$, $l_2 = -1$.

На рисунках 1 и 2 видно, что численное решение, полученное с помощью метода типа Розенброка, хорошо приближает точное решение.

В третьей главе исследуются уравнения параболического типа с эффектом запаздывания общего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)), \tag{21}$$

где $x \in [0, X] \subset \mathbb{R}^1$, $y \in [0, Y] \subset \mathbb{R}^1$ — пространственные и $t \in [t_0, t_0 + \theta] \subset \mathbb{R}^1$ — временная независимые переменные; $u(x, y, t) \in \mathbb{R}^1$ — искомая функция; $u_t(x, y, \cdot) = \{u(x, y, \ t + s), \ -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t; τ — величина запаздывания.

Также задаются начальные и граничные условия:

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \ x \in [0, X], \ y \in [0, Y], \ t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{22}$$

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), \ u(X, y, t) = g_1(y, t), \ y \in [0, Y], \ t \in [t_0, t_0 + \theta], \tag{23}$$

$$u(x, 0, t) = g_2(x, t), \ u(x, Y, t) = g_3(x, t), \ x \in [0, X], \ t \in [t_0, t_0 + \theta]. \tag{24}$$

Задача (21)–(24) представляет собой простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функции φ, g_0, g_1, g_2, g_3 и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x, y, t)$, понимаемое в классическом смысле. Отметим, что вопросы существования и единственности для подобных задач рассматривались ранее другими авторами [14].

Отрезки изменения пространственных переменных $[0, X]$ и $[0, Y]$ разбиваются на части с шагами $h_x = X/N_1$ и $h_y = Y/N_2$ соответственно, введя точки $x_i = ih_x$, $i = 0, \ldots, N_1$, $y_j = jh_y$, $j = 0, \ldots, N_2$. Также разбивается отрезок изменения временной переменной $[t_0, t_0 + \theta]$ на части с шагом $\Delta > 0$, введя точки $t_k = t_0 + k\Delta$, $k = 0, \ldots, M$. Будем считать, что величина $\tau/\Delta = m$ — целое число. Обозначим приближение точного решения $u(x_i, y_j, t_k)$ в точке (x_i, y_j, t_k) через u_k^{ij}.

Далее конструируется метод, являющийся аналогом метода переменных направлений. Выпишем определение этого метода. Определим $u_{k+\frac{1}{2}}^{ij}$ и u_{k+1}^{ij} из решения систем, которые могут быть решены трехдиагональной прогонкой:

$$\frac{u_{k+\frac{1}{2}}^{ij} - u_k^{ij}}{\Delta/2} = \frac{a^2}{h_x^2}(u_{k+\frac{1}{2}}^{i+1j} - 2u_{k+\frac{1}{2}}^{ij} + u_{k+\frac{1}{2}}^{i-1j}) + \\ + \frac{a^2}{h_y^2}(u_k^{ij+1} - 2u_k^{ij} + u_k^{ij-1}) + F_{k+\frac{1}{2}}^{ij}(u^{ij}(\cdot)), \tag{25}$$

$$\frac{u_{k+1}^{ij}-u_{k+\frac{1}{2}}^{ij}}{\Delta/2}=\frac{a^2}{h_x^2}(u_{k+\frac{1}{2}}^{i+1j}-2u_{k+\frac{1}{2}}^{ij}+u_{k+\frac{1}{2}}^{i-1j})+$$
$$+\frac{a^2}{h_y^2}(u_{k+1}^{ij+1}-2u_{k+1}^{ij}+u_{k+1}^{ij-1})+F_{k+\frac{1}{2}}^{ij}(u^{ij}(\cdot)),\quad (26)$$

где $i=1,\dots,N_1-1,\ j=1,\dots,N_2-1,\ k=0,\dots,M-1$, с начальными условиями

$$u_0^{ij}=\varphi(x_i,y_j,t_0),\ i=0,\dots,N_1,\ j=0,\dots,N_2,\quad (27)$$

$$u^{ij}(t)=\varphi(x_i,y_j,t),\ t<t_0,\ i=0,\dots,N_1,\ j=0,\dots,N_2,\quad (28)$$

и граничными условиями

$$u_k^{0j}=g_0(y_j,t_k),\ u_k^{N_1j}=g_1(y_j,t_k),\ j=0,\dots,N_2,\ k=0,\dots,M,\quad (29)$$

$$u_k^{i0}=g_2(x_i,t_k),\ u_k^{iN_2}=g_3(x_i,t_k),\ i=0,\dots,N_1,\ k=0,\dots,M,\quad (30)$$

$$u_{k+1/2}^{0j}=\frac{u_k^{0j}+u_{k+1}^{0j}}{2}-\frac{\Delta}{4}\Lambda_2(u_{k+1}^{0j}-u_k^{0j}),\quad (31)$$

где $j=1,\dots,N_2-1,\ k=0,\dots,M-1$,

$$u_{k+1/2}^{N_1j}=\frac{u_k^{N_1j}+u_{k+1}^{N_1j}}{2}-\frac{\Delta}{4}\Lambda_2(u_{k+1}^{N_1j}-u_k^{N_1j}),\quad (32)$$

где $j=1,\dots,N_2-1,\ k=0,\dots,M-1$. Через Λ_1 и Λ_2 обозначены:

$$\Lambda_1u_k^{ij}=(u_k^{i+1j}-2u_k^{ij}+u_k^{i-1j})\frac{a^2}{h_x^2},\ \Lambda_2u_k^{ij}=(u_k^{ij+1}-2u_k^{ij}+u_k^{ij-1})\frac{a^2}{h_y^2}.$$

В качестве $F_k^{ij}(u^{ij}(\cdot))$ возьмем функционал $f(x_i,y_j,t_k,u_k^{ij},u_{t_k}^{ij}(\cdot))$.

Далее вводится порядок невязки метода и доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *Невязка метода переменных направлений* (25)–(32) *имеет порядок малости* $O(\Delta^2+h_x^2+h_y^2)$.

Затем располагается раздел, в котором детально обсуждаются вопросы построения общей разностной схемы с последействием и определения порядка ее сходимости.

Далее рассматривается вопрос о сведении уравнения к однородным граничным условиям. Данное сведение необходимо для применения общей теории устойчивости разностных схем.

Затем показывается способ вложения метода переменных направлений в общую разностную схему. Рассматриваются вопросы устойчивости схемы по начальным данным и правой части. В результате удается получить следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть невязка метода переменных направлений (25)–(32) имеет порядок малости* $O(\Delta^{p_1} + h_x^{p_2} + h_y^{p_3})$, *функции* F_k^{ij} *липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции* I *удовлетворяет условию Липшица и имеет порядок погрешности* $O(\Delta^{p_0})$ *на точном решении. Также будем предполагать, что существует константа* K *такая, что* $h_1^2 + h_2^2 \leqslant K\Delta h_1 h_2$. *Тогда метод сходится с порядком малости* $O(\Delta^{\min\{p_1,p_0\}} + h_x^{p_2} + h_y^{p_3})$.

С помощью теорем 7 и 10 получаем, что метод переменных направлений с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок малости $O(\Delta^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

В последнем параграфе главы 3 проводится ряд численных экспериментов. Разработанный метод переменных направлений применяется для двух уравнений. В качестве первого примера рассматривается тестовое уравнение параболического типа с постоянным сосредоточенным запаздыванием. В качестве второго примера рассматривается двумерное уравнение Колмогорова — Пискунова — Петровского с запаздыванием. Приводятся результаты численных экспериментов. Описание программного комплекса для численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием приведено в Приложении 2.

В качестве иллюстрации метода переменных направлений рассмотрим тестовое уравнение параболического типа с постоянным сосредоточенным запаздыванием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + b \cdot u(t-\tau, x, y) + \cos(t)(x^2+y^2) -$$
$$- 4a^2 sin(t) - b sin(t-\tau)(x^2+y^2),$$

$t \in [0, \pi/2]$, $x \in [0,5]$, $y \in [0,5]$, $\tau = 0.1$; a, b — параметры. Начальные условия заданы следующим образом:

$$u(s,x,y) = sin(s)(x^2+y^2),\ -\tau \leqslant s \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 5.$$

Граничные условия:

$$u(t,x,0) = sin(t)x^2,\ u(t,x,5) = sin(t)(x^2+25),$$
$$u(t,0,y) = sin(t)y^2,\ u(t,5,y) = sin(t)(25+y^2).$$

Точным решением является функция $u(t,x,y) = sin(t)(x^2+y^2)$. Параметры уравнения были взяты следующим образом: $a = b = 5$. Далее приведены результаты численного эксперимента. На следующих рисунках изображена разница между приближенным решением, построенным с помощью разработанного метода переменных направлений, и точным решением уравнения при $t = \pi/2$.

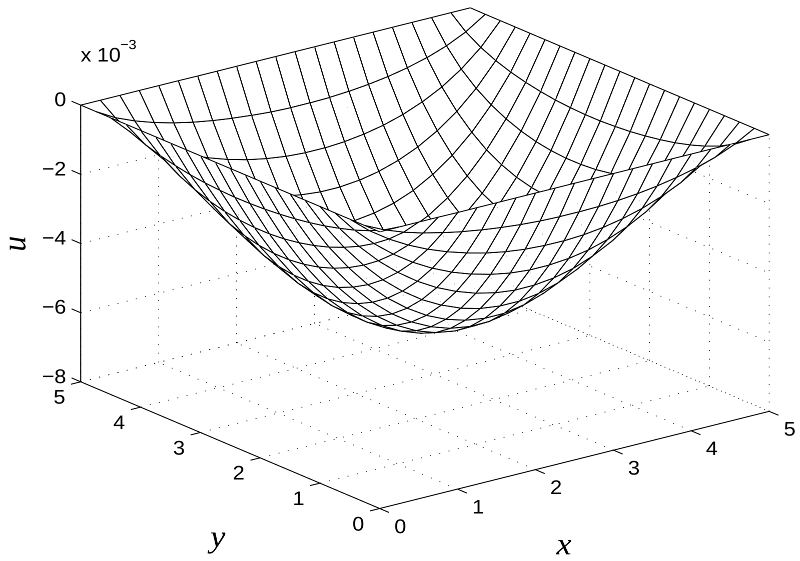

Рис. 3. Число точек разбиения по t: $M = 25$, по x: $N_1 = 20$, по y: $N_2 = 20$.

Абсолютная погрешность равна 0.006.

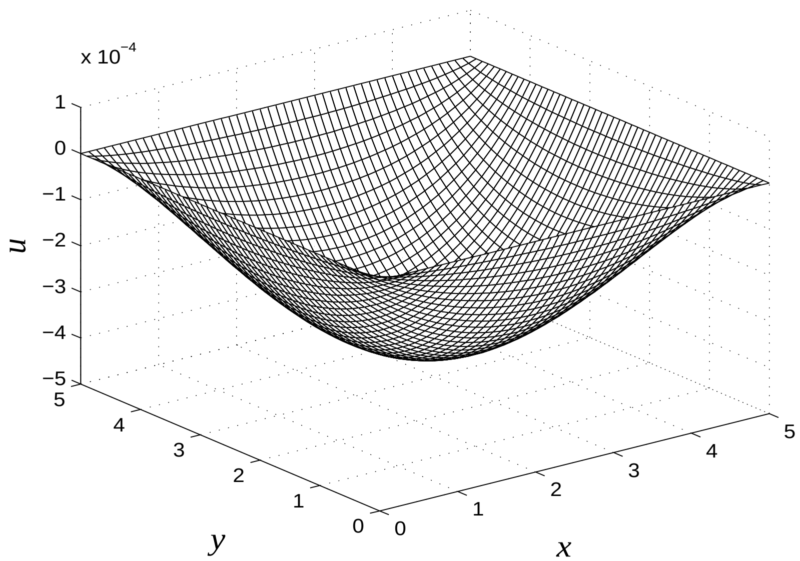

Рис. 4. Число точек разбиения по t: $M = 100$, по x: $N_1 = 50$, по y: $N_2 = 50$.

Абсолютная погрешность равна 0.0004.

Заметим, что абсолютная погрешность уменьшается при уменьшении шагов разбиения. Этот численный эксперимент показывает, что решение, полученное методом переменных направлений, хорошо приближает точное решение.

В диссертации рассматриваются и другие численные примеры.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

1. Лекомцев А.В. Метод переменных направлений для численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 2(36). С. 8–13.

2. Лекомцев А.В. Полуявный метод для функционально-дифференциально-алгебраических уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 75–76.

3. Лекомцев А.В., Пименов В.Г. Полуявный метод для численного решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. № 5. С. 62–67.

4. Лекомцев А.В., Пименов В.Г. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Том 16, № 1. С. 102–118.

Другие публикации:

5. Лекомцев А.В. Метод переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // СПИСОК-2009: Системное программирование, интеллектуальные системы, обеспечение качества. Тезисы доклада межвузовской научной конференции по проблемам информатики. Екатеринбург. УрГУ. 20–23 апреля 2009. С. 118–123.

6. Лекомцев А.В., Пименов В.Г. Метод типа Розенброка для численного решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений // Известия Уральского государственного университета (Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 12). 2010. № 74. С. 83–113.

Подписано в печать XX.XX.2010 г. Формат $60 \times 84 \times 16$.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,5.
Заказ № 854. Тираж 100.

Отпечатано в типографии ИПЦ
«Издательство УрГУ».
г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.